

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие.</b>	10
<b>Глава 1. Введение в анализ.....</b>	<b>11</b>
§ 1.1. Понятие функции. Числовые функции и графики. Обратная и сложная функции.....	11
§ 1.2. Предел числовой последовательности..... 1. Определения. Примеры (18). 2. Основные свойства пределов последовательностей (20). 3. Общие правила нахождения пределов (22). 4. Монотонные последовательности и их пределы (23). 5. Бесконечные пределы (24).	18
§ 1.3. Число $e$ .....	25
§ 1.4. Предел функции..... 1. Определение и примеры (27). 2. Основные свойства пределов функции (28). 3. Общие правила нахождения пределов функций (30). 4. Более общий подход к понятию предела функции (31). 5. Предел при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$ . Бесконечный предел (32).	27
§ 1.5. Два замечательных предела.....	33
§ 1.6. Формула непрерывных процентов.....	36
§ 1.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	38
§ 1.8. Непрерывность функции..... 1. Непрерывность функции в точке (39). 2. Арифметические операции над непрерывными функциями (42). 3. Постоянство знака непрерывной функции (43). 4. Расширение понятия непрерывности функции в точке (44). § 1.9. Теорема о стягивающихся отрезках. Точные границы числового множества.....	39
§ 1.10. Свойства функций, непрерывных на отрезке..... 1. Теорема о существовании корня (49). 2. Теорема о промежуточном значении (50). 3. Ограниченность непрерывной функции (50). 4. Достижение крайних значений (51). 5. Множество значений непрерывной функции (52). 6. Равномерная непрерывность (53).	45
§ 1.11. Непрерывность сложной и обратной функций. Непрерывность элементарных функций.....	48
§ 1.12. Паутинные модели рынка.....	53
§ 1.13. Функции нескольких переменных..... 1. Определение функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня (59). 2. Элементарные функции нескольких переменных (61).	56
	59

§ 1.14. Сходимость точек в $R^n$ . Открытые и замкнутые множества. Предел и непрерывность для функций нескольких переменных .....	62
1. Расстояние между точками в $R^n$ (62). 2. Сходимость точек в $R^n$ (63). 3. Открытые и замкнутые множества в $R^n$ (66).	
4. Предельные точки множества. Изолированные точки (67).	
5. Предел и непрерывность функций нескольких переменных (68).	
§ 1.15. Свойства непрерывных функций на ограниченных замкнутых множествах.....	70
§ 1.16. Множества, заданные с помощью неравенств.....	73
Приложения к главе 1.....	74

## **Глава 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной** .....

§ 2.1. Производная функции в точке.....	79
1. Определение производной (79). 2. Физический смысл производной (81). 3. Геометрический смысл производной (81). 4. Уравнение касательной (83). 5. Односторонние производные (84).	
§ 2.2. Дифференцируемость и непрерывность.....	85
§ 2.3. Правила дифференцирования .....	87
§ 2.4. Производные элементарных функций.....	91
1. Производная логарифмической функции (92). 2. Производная показательной функции (93). 3. Производная степенной функции (93). 4. Производные тригонометрических функций (94). 5. Производные обратных тригонометрических функций (95).	
§ 2.5. Дифференциал и приближенные вычисления .....	97
§ 2.6. Предельные величины в экономике .....	100
§ 2.7. Логарифмическая производная.....	102
§ 2.8. Эластичность и ее свойства.....	106
1. Геометрический смысл эластичности (111). 2. Ценовая эластичность спроса (113).	
§ 2.9. Распределение налогового бремени .....	115
§ 2.10. Теоремы о промежуточных значениях.....	118
§ 2.11. Правило Лопиталю .....	122
§ 2.12. Цены, предельные издержки и объем производства.....	126
§ 2.13. Высшие производные.....	130
1. Производная порядка $n$ степенной функции (130). 2. Производная порядка $n$ показательной функции (131). 3. Производные порядка $n$ функций $\sin x$ , $\cos x$ (132). 4. Производная порядка $n$ функции $y = \ln x$ (132).	
§ 2.14. Применение производных к исследованию функций.....	132
1. Возрастание и убывание функции (132). 2. Экстремум функции (135). 3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке (138). 4. Оценка числа корней уравнения (140).	
§ 2.15. Функция предложения конкурентной фирмы.....	142
§ 2.16. Выпуклые функции.....	148

§ 2.17. Неравенство Йенсена и средние величины .....	159
§2.18. Формула Тейлора .....	164

### **Глава 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных .....** 171

§3.1. Частные производные .....	171
§ 3.2. Полный дифференциал и дифференцируемость функции.....	174
§3.3. Достаточные условия дифференцируемости .....	177
§ 3.4. Дифференцируемость сложной функции .....	180
§3.5. Производная по направлению. Градиент .....	182
§ 3.6. Касательные прямые и плоскости.....	187
§3.7. Предельная полезность и предельная норма замещения.	191
§3.8. Эластичность функции нескольких переменных.....	193
§3.9. Однородные функции. Формула Эйлера.....	197
§ 3.10. Частные производные высших порядков .....	199
§3.11. Формула Тейлора для функций нескольких переменных .....	202
§ 3.12. Локальный экстремум функции нескольких переменных .....	208
1. Необходимые условия первого порядка (208). 2. Необходимые условия второго порядка (210). 3. Достаточные условия существования локального экстремума (212). 4. Экономические приложения (215).	
§ 3.13. Условный экстремум .....	217
§ 3.14. Выпуклые функции нескольких переменных .....	224
§ 3.15. Квадратичные формы и выпуклые функции.....	233
§ 3.16. Экстремумы и стационарные точки выпуклых функций   236 1. Глобальные и локальные экстремумы (236). 2. Стационарные точки и глобальные экстремумы (237). 3. Единственность экстремума выпуклой функции (238).	
§3.17. Теорема Куна - Таккера .....	240
1. Постановка задачи выпуклого программирования (241). 2. Необходимое условие экстремума (243). 3. Достаточное условие экстремума (247). 4. Включение уравнений в систему ограничений (253). 5. Связь с седловыми точками (257).	
§ 3.18. Функции спроса.....	259
§ 3.19. Уравнения Слуцкого.....	262

### **Глава 4. Определенный интеграл и его приложения .....** 275

§ 4.1. Неопределенный интеграл и его свойства .....	275
---	-----

1. Первообразная и неопределенный интеграл (275). 2. Свойства неопределенного интеграла (277). 3. Таблица основных интегралов (279).	
§ 4.2. Методы интегрирования .....	281
1. Интегрирование методом замены переменной (281). 2. Метод интегрирования по частям (284).	
§ 4.3. Интегрирование некоторых классов функций .....	287
1. Интегрирование рациональных функций (287).	
2. Интегрирование тригонометрических функций (292).	
3. Использование справочников и математических процессоров. Неберущиеся интегралы (294).	
§ 4.4. Определенный интеграл.....	295
1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции (295). 2. Понятие определенного интеграла (299). 3. Интегрируемость непрерывной функции (304). 4. Аддитивность определенного интеграла (305). 5. Теорема о среднем для определенного интеграла (307).	
§ 4.5. Формула Ньютона - Лейбница .....	308
1. Интеграл с переменным верхним пределом (308). 2. Формула Ньютона - Лейбница (311). 3. Свойства определенного интеграла (313). 4. Интегрирование по частям в определенном интеграле (315). 5. Замена переменной в определенном интеграле (316).	
§ 4.6. Приложения определенного интеграла.....	318
1. Вычисление площадей плоских фигур (318). 2. Вычисление объема тела вращения (321). 3. Экономические приложения определенного интеграла (324).	
§ 4.7. Несобственные интегралы.....	328
1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (328). 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (331). 3. Признаки сходимости несобственных интегралов (334).	
§ 4.8. Приближенное вычисление определенных интегралов ..	338
1. Формула прямоугольников (339). 2. Формула Симпсона (341).	

## **Глава 5. Числовые и степенные ряды .....** 345

§ 5.1. Понятие числового ряда .....	345
1. Основные определения (345). 2. Свойства сходящихся рядов (348). 3. Необходимый признак сходимости ряда (350).	
§ 5.2. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.....	352
1. Критерий сходимости (352). 2. Достаточные признаки сходимости (352). 3. Оценка остатка ряда (360).	
§ 5.3. Знакопеременные ряды.....	362
1. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница (362). 2. Ряды с членами произвольного знака. Плюс- и минус-ряды для данного ряда (364). 3. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства (365). 4. Условно сходящиеся ряды (366).	
§ 5.4. Степенные ряды .....	368

1. Степенной ряд. Теорема Абеля (368). 2. Область сходимости степенного ряда (370). 3. Отыскание радиуса сходимости степенного ряда (371). 4. Свойства степенных рядов (373).	
§ 5.5. Разложение функций в степенные ряды .....	374
1. Ряд Маклорена (374). 2. Достаточное условие разложимости функции в ряд Маклорена (376). 3. Разложение функции $e^x$ (377). 4. Разложение функций $\sin x$ и $\cos x$ (378). 5. Разложение функций $\ln(1+x)$ и $\arctg x$ (379). 6. Разложение функции $(1+x)^n$ (380).	
§ 5.6. Степенные ряды с произвольным центром .....	382
1. Интервал сходимости (382). 2. Ряд Тейлора (383).	
§ 5.7. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям .....	384
1. Вычисление значений показательной функции (384). 2. Вычисление значений логарифмической функции (386). 3. Вычисление значений синуса и косинуса (387). 4. Приближенное нахождение интегралов (388).	
§ 5.8. Ряды из матриц .....	390
1. Последовательности из матриц (390). 2. Ряды из матриц. Определения и примеры (392). 3. Степенные матричные ряды (393).	
<b>Глава 6. Кратные интегралы</b> .....	<b>396</b>
§ 6.1. Двойной интеграл и его свойства .....	396
1. Определение двойного интеграла (396). 2. Геометрический смысл двойного интеграла (399). 3. Свойства двойного интеграла (401).	
§ 6.2. Для каких функций существует двойной интеграл? .....	406
§ 6.3. Сведение двойного интеграла к повторному .....	409
§ 6.4. Другой подход к понятию двойного интеграла .....	413
§ 6.5. Замена переменных в двойном интеграле .....	414
1. Предварительная формула замены переменных (415).	
2. Вычисление $T(Q)$ . (417). 3. Окончательный вид формулы замены переменной в кратном интеграле (419).	
§ 6.6. Тройной интеграл .....	421
§ 6.7. Несобственные кратные интегралы .....	425
<b>Глава 7. Дифференциальные уравнения</b> .....	<b>435</b>
§ 7.1. Общие понятия и примеры .....	435
§ 7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка .....	437
§ 7.3. Уравнения с разделяющимися переменными. Автономные уравнения .....	443
§ 7.4. Математические модели экономической динамики с непрерывным временем .....	448
1. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе) (449). 2. Логистический рост (451). 3. Неоклассическая модель роста (456).	

§ 7.5. Однородные уравнения.....	459
§ 7.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .....	464
§7.7. Уравнения Бернулли и Риккати.....	470
§ 7.8. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.....	475
§ 7.9. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	479
1. Общие сведения (479). 2. Уравнения, допускающие понижение порядка (480).	
§ 7.10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.....	484
§ 7.11. Линейные однородные уравнения. Фундаментальный набор решений.....	488
§ 7.12. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	492
1. Линейные однородные уравнения (492). 2. Линейные неоднородные уравнения (498).	
§7.13. Системы дифференциальных уравнений.....	507
§ 7.14. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.....	509
1. Общие сведения о линейных системах (509). 2. Метод сведения линейной системы к одному уравнению более высокого порядка (511).	
§ 7.15. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	513
1. Однородные линейные системы (513). 2. Неоднородные линейные системы (529).	
§ 7.16. Разностные уравнения .....	535
1. Общие понятия и примеры (535). 2. Линейные разностные уравнения (537).	
§7.17. Модели экономической динамики с дискретным временем.....	544
1. Модель Самуэльсона-Хикса (544). 2. Паутинная модель рынка (546). 3. Задача об определении текущей стоимости купонной облигации (547).	
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>550</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>551</b>