

**Письменный, Д. Т.**

Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1 / Дмитрий Письменный. — 15-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2017. — 288 с. : ил. — (Высшее образование).

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	9
-------------------	---

## Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Матрицы .....	10
1.1. Основные понятия .....	10
1.2. Действия над матрицами .....	11
§ 2. Определители .....	14
2.1. Основные понятия .....	14
2.2. Свойства определителей .....	15
§ 3. Невырожденные матрицы .....	18
3.1. Основные понятия .....	18
3.2. Обратная матрица .....	18
3.3. Ранг матрицы .....	20
§ 4. Системы линейных уравнений .....	22
4.1. Основные понятия .....	22
4.2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли .....	23
4.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера .....	25
4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса .....	26
4.5. Системы линейных однородных уравнений .....	29

## Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 5. Векторы .....	31
5.1. Основные понятия .....	31
5.2. Линейные операции над векторами .....	32
5.3. Проекция вектора на ось .....	33
5.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы .....	35
5.5. Действия над векторами, заданными проекциями .....	37
§ 6. Скалярное произведение векторов и его свойства .....	38
6.1. Определение скалярного произведения .....	38
6.2. Свойства скалярного произведения .....	38
6.3. Выражение скалярного произведения через координаты ...	39
6.4. Некоторые приложения скалярного произведения .....	40
§ 7. Векторное произведение векторов и его свойства .....	41
7.1. Определение векторного произведения .....	41
7.2. Свойства векторного произведения .....	42
7.3. Выражение векторного произведения через координаты ...	43
7.4. Некоторые приложения векторного произведения .....	44
§ 8. Смешанное произведение векторов .....	45

8.1. Определение смешанного произведения, его геометрический смысл . . . . .	45
8.2. Свойства смешанного произведения . . . . .	45
8.3. Выражение смешанного произведения через координаты ..	46
8.4. Некоторые приложения смешанного произведения . . . . .	47

### **Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ**

§ 9. Система координат на плоскости . . . . .	48
9.1. Основные понятия . . . . .	48
9.2. Основные приложения метода координат на плоскости —	49
9.3. Преобразование системы координат . . . . .	51
§ 10. Линии на плоскости . . . . .	53
10.1. Основные понятия . . . . .	53
10.2. Уравнения прямой на плоскости . . . . .	56
10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи . . . . .	61
§ 11. Линии второго порядка на плоскости . . . . .	62
11.1. Основные понятия . . . . .	62
11.2. Окружность . . . . .	62
11.3. Эллипс . . . . .	64
11.4. Гипербола . . . . .	66
11.5. Парабола . . . . .	70
11.6. Общее уравнение линий второго порядка . . . . .	72

### **Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ**

§ 12. Уравнения поверхности и линии в пространстве . . . . .	76
12.1. Основные понятия . . . . .	76
12.2. Уравнения плоскости в пространстве . . . . .	78
12.3. Плоскость. Основные задачи . . . . .	81
12.4. Уравнения прямой в пространстве . . . . .	82
12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи . . . . .	85
12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи . . . .	86
12.7. Цилиндрические поверхности . . . . .	88
12.8. Поверхности вращения. Конические поверхности . . . . .	89
12.9. Канонические уравнения поверхностей второго порядка... .	91

### **Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ**

§ 13. Множества. Действительные числа . . . . .	97
13.1. Основные понятия . . . . .	97
13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел ..	98
13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки . . . . .	99
§ 14. Функция . . . . .	100
14.1. Понятие функции . . . . .	100
14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций . . . . .	101

14.3. Основные характеристики функции . . . . .	102
14.4. Обратная функция . . . . .	103
14.5. Сложная функция . . . . .	104
14.6. Основные элементарные функции и их графики . . . . .	104
§ 15. Последовательности . . . . .	107
15.1. Числовая последовательность . . . . .	107
15.2. Предел числовой последовательности . . . . .	108
15.3. Пределный переход в неравенствах . . . . .	109
15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число $e$ . Натуральные логарифмы . . . . .	110
§ 16. Предел функции . . . . .	112
16.1. Предел функции в точке . . . . .	112
16.2. Односторонние пределы . . . . .	113
16.3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$ . . . . .	114
16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.) . . . . .	114
§ 17. Бесконечно малые функции (б.м.ф.) . . . . .	115
17.1. Определения и основные теоремы . . . . .	115
17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией . . . . .	118
17.3. Основные теоремы о пределах . . . . .	119
17.4. Признаки существования пределов . . . . .	121
17.5. Первый замечательный предел . . . . .	123
17.6. Второй замечательный предел . . . . .	124
§ 18. Эквивалентные бесконечно малые функции . . . . .	125
18.1. Сравнение бесконечно малых функций . . . . .	125
18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них . . . . .	126
18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций... .	127
§ 19. Непрерывность функций . . . . .	130
19.1. Непрерывность функции в точке . . . . .	130
19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке . . . . .	132
19.3. Точки разрыва функции и их классификация . . . . .	132
19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерыв- ность элементарных функций . . . . .	134
19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	135
§ 20. Производная функции . . . . .	137
20.1. Задачи, приводящие к понятию производной . . . . .	137
20.2. Определение производной; ее механический и геометричес- кий смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой... .	139
20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции . . . . .	141
20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций . . . . .	142
20.5. Производная сложной и обратной функций . . . . .	143
20.6. Производные основных элементарных функций . . . . .	145
20.7. Гиперболические функции и их производные . . . . .	149
20.8. Таблица производных . . . . .	151

§ 21. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций . . . . .	152
21.1. Неявно заданная функция . . . . .	152
21.2. Функция, заданная параметрически . . . . .	153
§ 22. Логарифмическое дифференцирование . . . . .	154
§ 23. Производные высших порядков . . . . .	155
23.1. Производные высших порядков явно заданной функции. . . . .	155
23.2. Механический смысл производной второго порядка . . . . .	156
23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции. . . . .	156
23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически . . . . .	156
§ 24. Дифференциал функции . . . . .	157
24.1. Понятие дифференциала функции . . . . .	157
24.2. Геометрический смысл дифференциала функции . . . . .	159
24.3. Основные теоремы о дифференциалах . . . . .	159
24.4. Таблица дифференциалов . . . . .	160
24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	161
24.6. Дифференциалы высших порядков . . . . .	162
§ 25. Исследование функций при помощи производных . . . . .	164
25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях . . . . .	164
25.2. Правила Лопиталю . . . . .	167
25.3. Возрастание и убывание функций . . . . .	171
25.4. Максимум и минимум функций . . . . .	172
25.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. . . . .	175
25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба . . . . .	176
25.7. Асимптоты графика функции . . . . .	178
25.8. Общая схема исследования функции и построения графика . . . . .	180
§ 26. Формула Тейлора . . . . .	181
26.1. Формула Тейлора для многочлена . . . . .	182
26.2. Формула Тейлора для произвольной функции . . . . .	183

## Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 27. Понятие и представления комплексных чисел . . . . .	186
27.1. Основные понятия . . . . .	186
27.2. Геометрическое изображение комплексных чисел . . . . .	186
27.3. Формы записи комплексных чисел . . . . .	187
§ 28. Действия над комплексными числами . . . . .	188
28.1. Сложение комплексных чисел . . . . .	188
28.2. Вычитание комплексных чисел . . . . .	189
28.3. Умножение комплексных чисел . . . . .	189
28.4. Деление комплексных чисел . . . . .	190
28.5. Извлечение корней из комплексных чисел . . . . .	191

## Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 29. Неопределенный интеграл . . . . .	193
29.1. Понятие неопределенного интеграла . . . . .	193
29.2. Свойства неопределенного интеграла . . . . .	194
29.3. Таблица основных неопределенных интегралов . . . . .	196
§ 30. Основные методы интегрирования . . . . .	198
30.1. Метод непосредственного интегрирования . . . . .	198
30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) . . . . .	200
30.3. Метод интегрирования по частям . . . . .	202
§ 31. Интегрирование рациональных функций . . . . .	203
31.1. Понятия о рациональных функциях . . . . .	203
31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	208
31.3. Интегрирование рациональных дробей . . . . .	210
§ 32. Интегрирование тригонометрических функций . . . . .	212
32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка . . . . .	212
32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ . . . . .	213
32.3. Использование тригонометрических преобразований . . . . .	214
§ 33. Интегрирование иррациональных функций . . . . .	214
33.1. Квадратичные иррациональности . . . . .	214
33.2. Дробно-линейная подстановка . . . . .	216
33.3. Тригонометрическая подстановка . . . . .	217
33.4. Интегралы типа $\int R(x; y/\sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$ . . . . .	218
33.5. Интегрирование дифференциального бинома . . . . .	218
§ 34. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы . . . . .	219

## Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 35. Определенный интеграл как предел интегральной суммы . . . . .	221
§ 36. Геометрический и физический смысл определенного интеграла . . . . .	222
§ 37. Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	224
§ 38. Основные свойства определенного интеграла . . . . .	226
§ 39. Вычисления определенного интеграла . . . . .	230
39.1. Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	230
39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной) . . . . .	230
39.3. Интегрирование по частям . . . . .	231
39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах . . . . .	233
§ 40. Несобственные интегралы . . . . .	233
40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода) . . . . .	234
40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода) . . . . .	236
§ 41. Геометрические и физические приложения определенного интеграла . . . . .	237
41.1. Схемы применения определенного интеграла . . . . .	237

41.2. Вычисление площадей плоских фигур . . . . .	239
41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой . . . . .	242
41.4. Вычисление объема тела . . . . .	245
41.5. Вычисление площади поверхности вращения . . . . .	247
41.6. Механические приложения определенного интеграла . . . . .	249
§ 42. Приближенное вычисление определенного интеграла . . . . .	254
42.1. Формула прямоугольников . . . . .	255
42.2. Формула трапеций . . . . .	255
42.3. Формула парабол (Симпсона) . . . . .	256

### **Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

§ 43. Функции двух переменных . . . . .	260
43.1. Основные понятия . . . . .	260
43.2. Предел функции . . . . .	261
43.3. Непрерывность функции двух переменных . . . . .	262
43.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области . . . . .	263
§ 44. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных . . . . .	263
44.1. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл . . . . .	263
44.2. Частные производные высших порядков . . . . .	265
44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции . . . . .	266
44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	268
44.5. Дифференциалы высших порядков . . . . .	268
44.6. Производная сложной функции. Полная производная . . . . .	269
44.7. Инвариантность формы полного дифференциала . . . . .	271
44.8. Дифференцирование неявной функции . . . . .	271
§ 45. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	273
§ 46. Экстремум функции двух переменных . . . . .	274
46.1. Основные понятия . . . . .	274
46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума . . . . .	275
46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области . . . . .	277
<b>Справочные материалы . . . . .</b>	<b>279</b>